



TITLE:

Cauchy問題のSingularityの伝播について (位相解析的方法による偏微分方程式論の研究会報告集)

AUTHOR(S):

浜田, 雄策

CITATION:

浜田, 雄策. Cauchy問題のSingularityの伝播について (位相解析的方法による偏微分方程式論の研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1970, 88: 119-134

ISSUE DATE:

1970-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/108094>

RIGHT:

Cauchy 問題の Singularity の伝播について

京工織 工芸 浜 田 雄 策

§ 1

複素領域において正則な係数をもつ線形偏微分方程式の Cauchy 問題にかんして、初期面が非特性、初期条件が特異点をもつときを考える。前の機会に初期値の特異点 (regular な面をなすと仮定する) から出る特性面が simple の場合について考察した。即ち初期値が高と pole ならば解は特性面に沿って高と pole 及び対数項、初期値が真性特異点ならば解は特性面に沿って真性特異点及び対数項をもつことが云へる。ここでは特異点から出る特性面が重なっている場合について考察したいと思います。

この場合勿論 simple の場合と異った状態が生じる。即ち初期値が pole なのに拘らず解は真性特異点をもつことが起る。たとえば

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(0, y) = \frac{1}{y} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \end{array} \right.$$

にかんして解は

$$u(x, y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!} \left(\frac{x^2}{y}\right)^n$$

によって表わされる。¹⁾

しかし低階の項について或制限を設けるならば simple の場合と同様なことが云へる。低階の項の制限については2変数のとまの A. Lax [1] の条件, 一般の場合には, Mizohata-Ohya 氏 [4] による E. E. Levi 条件, Matsuura 氏 [5] による条件に類似の条件を使用する。方法は Simple の場合と全く同様に Mizohata [3] による方法を本質的に使用する。亦 Ludwig [2] も参考にした。

§2

先づ2変数の場合について述べる。

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_i(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$\lambda_i(x, y)$ は $(0, 0)$ の近傍で正則な函数で, $\lambda_i(0, 0)$ ($i=1, 2, \dots, m$) は distinct と仮定する。

A. Lax の条件を充す方程式

$$(2.1) \quad \partial_1^{l_1} \cdots \partial_m^{l_m} u + \sum_{\substack{v_1 \leq l_1, \dots, v_m \leq l_m \\ v_1 + \dots + v_m < l \\ l_1 + \dots + l_m = l}} a_{v_1, \dots, v_m}(x, y) \partial_1^{v_1} \cdots \partial_m^{v_m} u = 0$$

1) この7式は既に Hill [6] によって指適されている。

を考へる。

λ_i にかゝる $(0,0)$ を通る characteristic curve $\Sigma \varphi''(x,y)$
 $= 0$ ($\varphi''(0,y) = y$) とする。そのとき

Th 1 方程式 (2.1) において初期条件が $y=0$ で高々 pole
 をもつとき解は

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{F^{(i)}(x,y)}{[\varphi''(x,y)]^{p_i}} + G^{(i)}(x,y) \log \varphi''(x,y) + H^{(i)}(x,y) \right\}$$

又、初期条件が $y=0$ で essential singularity をもつとき

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^{(i)}(x,y)}{[\varphi''(x,y)]^k} + G^{(i)}(x,y) \log \varphi''(x,y) + H^{(i)}(x,y) \right\}$$

と表わされる。

ここで p_i は integer ≥ 0 , F, G, H は $(0,0)$ の近傍で正則な函数である。

p_i についてはたとへば初期条件が

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(0,y) = 0 \quad (k \neq h), \quad \frac{\partial^h u}{\partial x^h}(0,y) = \frac{1}{y^p}$$

のとき

$$p_i \leq \lambda_i + p - h - 1$$

注意 或 i について, $\varphi''(x,y) = 0$ 上で singularity をもたない

ことは起りうる。(このことは simple の場合と同様である)

33

次に一般の場合について述べる。

Cauchy 问题

$$(3.1) \quad \begin{cases} a(x, \frac{\partial}{\partial x}) u = 0 \\ \text{初期面 } x_1 = 0 \\ \text{初期条件は } x_2 = 0 \text{ を除いて正則} \end{cases}$$

において微分作用素 $a(x, \frac{\partial}{\partial x})$ とし

$$(3.2) \quad a(x, \frac{\partial}{\partial x}) = h_2(x, \frac{\partial}{\partial x}) \left[h_1(x, \frac{\partial}{\partial x}) \right]^2 + b(x, \frac{\partial}{\partial x}) h_1(x, \frac{\partial}{\partial x}) + c(x, \frac{\partial}{\partial x})$$

の 形 の も の を 考 え る。

ここで $h_1(x; \zeta), h_2(x; \zeta)$ は ζ について $x \in l_1$ 次, l_2 次の
齊次多項式で係数は x の正則函数 ($2l_1 + l_2 = m$), 更に

(3.3)
$$\begin{cases} p_1(0; \xi, 1, 0, \dots, 0) = 0 & \text{if } \xi \in \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d, \\ p_2(0; \xi, 1, 0, \dots, 0) = 0 & \text{if } \xi \in \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{d_2} \end{cases}$$

と して と して $\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell_1}, \mu_1, \dots, \mu_{\ell_2}$ は distinct と する。

又, $b(x, y)$ は y について $d_1 + d_2 - 1$ 次の有次多項式

$C(x, y)$ は “高々 $m-2$ 次” の多項式 “ z ” あり。

241 は Mizohata - Ohya 氏 [5] E. E. Levi の結果, Matsuura 氏 [5] の結果の analogous である。

即 ち

$$a(x, \xi) = P_m(x, \xi) + P_{m-1}(x, \xi) + \dots + P_0(x, \xi)$$

において

$$P_m(x, \zeta) = (\zeta_1 - \lambda_1(x; \zeta'))^2 \cdots (\zeta_1 - \lambda_{l_1}(x; \zeta'))^2 \\ \times (\zeta_1 - \mu_1(x; \zeta')) \cdots (\zeta_1 - \mu_{l_2}(x; \zeta'))$$

なる分解が $x=0$ の近傍, ζ' は $(1, 0, \dots, 0)$ の近傍で成立する。

ここで $\lambda_i(x, \zeta')$ は $x=0$, $(\zeta')=(1, 0, \dots, 0)$ の近傍で正則, 更に

$$\lambda_i(0; 1, 0, \dots, 0) = \lambda_i, \quad \mu_i(0; 1, 0, \dots, 0) = \mu_i \\ i=1, 2, \dots, l_1 \quad i=1, 2, \dots, l_2$$

そのとき $\exists h_1(x, \zeta), h_2(x, \zeta)$

$$P_m(x, \zeta) = h_2(x, \zeta) [h_1(x, \zeta)]^2$$

とかける。更に $P_{m-1}(x, \zeta)$ について E. E. Levi の条件

$$\left[P_{m-1}(x, \zeta) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 P_m}{\partial \zeta_1^2} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_1} + \sum_{\alpha=2}^n \frac{\partial^2 P_m}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_\alpha} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x_\alpha} \right\} \right] = 0 \\ \zeta_1 = \lambda_i(x; \zeta') \\ |x| < \varepsilon, |z_1 - 1| < \varepsilon, |z_2| < \varepsilon, \dots, |z_n| < \varepsilon$$

を設ける。そのとき

$$a(x, \frac{\partial}{\partial x}) = h_2(x, \frac{\partial}{\partial x}) [h_1(x, \frac{\partial}{\partial x})]^2 + b(x, \frac{\partial}{\partial x}) h_1(x, \frac{\partial}{\partial x}) + c(x, \frac{\partial}{\partial x})$$

とかける。

従って $P_m(x, \zeta) = \zeta_1^2 - \zeta_2 \zeta_3$ なる場合は考察から排除する。

さて $x_1 = x_2 = 0$ から出る $h_1(x, \frac{\partial}{\partial x})$ にかゝる characteristic surface と $\varphi''(x) = 0$, $x, h_2(x, \frac{\partial}{\partial x})$ にかゝる characteristic surface と $\psi''(x) = 0$ ($\varphi''(0, x') = x_2, \psi''(0, x') = x_3$) とする。

そのとき

Th 2

$$(3.4) \quad a(x, \frac{\partial}{\partial x}) u = 0$$

initial surface は $x_1 = 0$

initial condition が $x_2 = 0$ を除いて高々 pole のとき

$$(3.5) \quad u = \sum_{i=1}^{l_1} \left\{ \frac{F_i^{(i)}(x)}{[\varphi_i^{(i)}(x)]^{p_i}} + G_i^{(i)}(x) \log \varphi_i^{(i)}(x) + H_i^{(i)}(x) \right\} \\ + \sum_{i=1}^{l_2} \left\{ \frac{\widetilde{F_i^{(i)}}(x)}{[\widetilde{\psi_i^{(i)}}(x)]^{q_i}} + \widetilde{G_i^{(i)}}(x) \log \psi_i^{(i)}(x) + \widetilde{H_i^{(i)}}(x) \right\}$$

次に initial condition が $x_2 = 0$ 上 2^{nd} essential singularity を含

ふるときには

$$(3.6) \quad u = \sum_{i=1}^{l_1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k^{(i)}(x)}{[\varphi_i^{(i)}(x)]^k} + G_i^{(i)}(x) \log \varphi_i^{(i)}(x) + H_i^{(i)}(x) \right\} \\ + \sum_{i=1}^{l_2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widetilde{F_k^{(i)}}(x)}{[\widetilde{\psi_i^{(i)}}(x)]^k} + \widetilde{G_i^{(i)}}(x) \log \psi_i^{(i)}(x) + \widetilde{H_i^{(i)}}(x) \right\}$$

特に $l_1 = l_2 = 0$ は initial condition が

$$\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}(0, x') = \frac{w_k(x')}{x_2^p}, \quad \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}(0, x') = 0 \quad k \neq p \quad 0 \leq k \leq m-1$$

$$\text{のときは} \quad \begin{cases} p_i \leq p - k + 1 \\ q_i \leq p - k \end{cases}$$

§ 4 Th 2 の証明

initial condition として

$$(4.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^h u}{\partial x_1^h}(0, x') = \frac{w(x'')}{x_2^p} \\ \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}(0, x') = 0 \end{cases} \quad k \neq h \quad 0 \leq k \leq m-1$$

の場合について Th 2 を証明する。

formal solution

$$(4.2) \quad u = \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{k=-p+h-1}^{\infty} f_k(\varphi^{(i)}) u_k^{(i)} + \sum_{i=1}^{l_2} \sum_{k=-p+h}^{\infty} f_k(\psi^{(i)}) v_k^{(i)}$$

を構成しよう。

$$\begin{cases} f_0(\Delta) = \log \Delta \\ f_{-1}(\Delta) = \frac{1}{\Delta} \\ f_{-h}(\Delta) = \frac{(-1)^h (h-1)!}{\Delta^h} \end{cases} \quad \begin{cases} f_\alpha(\Delta) = \frac{\Delta^\alpha}{\alpha!} \log \Delta - \frac{A_\alpha}{\alpha!} \Delta^\alpha \\ \alpha: \text{整数} > 0 \\ A_\alpha = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

これを $a(x, \frac{\partial}{\partial x})u = 0$ に代入して $f_{k-m+2}(\varphi^{(i)}), f_{k-m+1}(\psi^{(i)})$

の係数を比較して

$$(4.3) \quad \begin{cases} \widetilde{L}_0 L_1 L_1(u_k^{(i)}) + \widetilde{L}_0 L_1(u_k^{(i)}) + \widetilde{L}_0(u_k^{(i)}) \\ = \sum_{\alpha=0}^{m-3} \mathcal{L}_{\alpha+3}[u_{k-1-\alpha}^{(i)}] \end{cases}$$

$$(4.4) \quad \widetilde{L}_1 L_0 L_0[v_k^{(i)}] + \widetilde{L}_0 L_0[v_k^{(i)}] = \sum_{\alpha=0}^{m-3} \mathcal{L}_{\alpha+2}[v_{k-1-\alpha}^{(i)}]$$

を得る。

$$\begin{cases} u_k \equiv 0 & k \leq -p + h - 1 \\ v_k \equiv 0 & k \leq -p + h \end{cases} \quad \text{と規約する.}$$

但し (4.3), (4.4) において

$$(4.5) \quad \begin{cases} L_0 = h_1(x, \varphi_x^{(n)}) \neq 0 & (x=0 \text{ の近傍で}) \\ \tilde{L}_0 = h_2(x, \varphi_x^{(n)}) \neq 0 & (\quad \quad \quad) \\ \tilde{L}_0 = h_{\ell_1 + \ell_2 - 1}(x, \varphi_x^{(n)}) \\ L_1 = \sum_{j=1}^n h_1^{(j)}(x, \varphi_x^{(n)}) \frac{\partial}{\partial x_j} + C(x) \\ \tilde{L}_1 = \sum_{j=1}^n h_2^{(j)}(x, \varphi_x^{(n)}) \frac{\partial}{\partial x_j} + C'(x) \end{cases}$$

\mathcal{L}_α は order α の differential operator である

さて, (4.3) は次の形に書き直される。

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{h_1^{(n)}(x, \varphi_x^{(n)})} = \dots = \frac{dx_n}{h_1^{(n)}(x, \varphi_x^{(n)})} = dt \\ x_1(0) = 0, \quad x_k(0) = y_k \quad k=2, \dots, n \end{cases}$$

の解を $x_i = x_i(t, y) \quad i=1, 2, \dots, n$ とする。

これによって正則な座標変換

$$(x) \xrightarrow{\mathcal{J}_1^{(n)}} (t, y)$$

を定義する。その逆変換を $\mathcal{T}_1^{(n)}$ とする。

$$u_k^{(n)}(t, y) = u_k^{(n)}(\mathcal{T}_1^{(n)}(t, y)) \quad \text{とかくと } (t, y) \text{ 系にかんして}$$

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1(t, y) \quad \text{とかけるとこれにより (4.3) は}$$

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + a_i(t, y) \frac{\partial}{\partial t} + b_i(t, y) \right] u_k^{(i)}(t, y) = \sum_{\alpha=0}^{m-3} \mathcal{L}_{\alpha+3} [u_{k-1-\alpha}^{(i)}] \\ \text{特に} \quad \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + a_i(t, y) \frac{\partial}{\partial t} + b_i(t, y) \right] u_{-p+h-1}^{(i)} = 0 \end{array} \right.$$

となる。 \mathcal{L}_α は (t, y) にかゝり α 階微分作用素。

次に $u_k^{(i)}$ について考える。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{h_2^{(i)}(x, \psi_x^{(i)})} = \dots = \frac{dx_n}{h_2^{(i)}(x, \psi_x^{(i)})} = dt \\ x_1(0) = 0, \quad x_k(0) = y_k \quad k=2, \dots, n \end{array} \right.$$

の解を $x_i = x_i(t, y) \quad i=1, 2, \dots, n$ とし、これにより正則な座標変換 $(x) \xrightarrow{\mathcal{I}_i^{(2)}} (t, y)$ を定義する。その逆変換

を $\mathcal{I}_i^{(2)}$ とする。 $v_k^{(i)}(t, y) = v_k^{(i)}(\mathcal{I}_i^{(2)}(t, y))$ とかくと

$$L_i = \frac{\partial}{\partial t} + \beta_i(t, y) \quad \text{とかけることを用いて (4.4) は}$$

$$(4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial}{\partial t} + C_i(t, y) \right] v_k^{(i)} = \sum_{\alpha=0}^{m-2} \mathcal{L}_{\alpha+2} [v_{k-1-\alpha}^{(i)}] \\ \text{特に} \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} + C_i(t, y) \right] v_{-p+h}^{(i)} = 0 \end{array} \right.$$

を得る。ここで \mathcal{L}_α は (t, y) にかゝる高々 α 階微分作用素。

次に initial condition について調べる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial x_1^\alpha} &= \sum_{l=1}^{l_1} \sum_{k=-p+h-1}^{\infty} f_{k-\alpha}(\varphi^{(i)}) \left\{ \left(\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x_1} \right)^\alpha u_k^{(i)} + [(\alpha-1) \left(\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x_1} \right)^{\alpha-1} \frac{\partial u_{k-1}^{(i)}}{\partial x_1} + C(x) u_{k-1}^{(i)}] \right. \\ &\quad \left. + \dots \right\} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{l_2} \sum_{k=-p+h}^{\infty} f_{k-\alpha}(\psi^{(i)}) \left\{ \left(\frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x_1} \right)^\alpha u_k^{(i)} + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad \left. \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = \alpha_i(x') \quad , \quad \left. \frac{\partial \psi^{(i)}}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = \beta_i(x')$$

に對して, $\alpha_i(x')$ $i=1, 2, \dots, l_1$, $\beta_i(x')$, $i=1, 2, \dots, l_2$ は $x=0$ の近傍で distinct, 従つて

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & 1 & \alpha_2 & 1 & \dots & \alpha_{l_1} & 1 & \beta_1 & \dots & \beta_{l_2} \\ \alpha_1^2 & 2\alpha_1 & \alpha_2^2 & 2\alpha_2 & \dots & \alpha_{l_1}^2 & 2\alpha_{l_1} & \beta_1^2 & \dots & \beta_{l_2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{m-1} & (m-1)\alpha_1^{m-2} & \alpha_2^{m-1} & (m-1)\alpha_2^{m-2} & \dots & \alpha_{l_1}^{m-1} & (m-1)\alpha_{l_1}^{m-2} & \beta_1^{m-1} & \dots & \beta_{l_2}^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{を利用して} \quad u_{-p+h-1}^{(i)} \Big|_{x_1=0} = 0 \quad i=1, 2, \dots, l_1. \quad \text{又}$$

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{-p+h}^{(i)} \\ v_{-p+h}^{(i)} \\ \frac{\partial u_{-p+h-1}^{(i)}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1(h, i, x) W(x') \\ \Delta_2(h, i, x) W(x'') \\ \Delta_3(h, i, x) W(x'') \end{array} \right.$$

こゝで $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ は h, i 及 n $a(x, \frac{\partial}{\partial x})$ に對し同僚する $x=0$ の近傍で正則な函数である。更に $k \geq 1$ のときは

$$u_{-p+h+k}^{(i)} \Big|_{x_1=0}, \quad v_{-p+h+k}^{(i)} \Big|_{x_1=0}, \quad \frac{\partial u_{-p+h+k-1}^{(i)}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} \quad \text{は夫々}$$

$$(4.9) \quad \sum_{j=1}^{l_1} m e_{p_j}^{(i)}(u_{-p+h+k-1}^{(i)}) + \sum_{j=1}^{l_1} \sum_{p_j=2}^{m-1} m e_{p_j}^{(i)}(u_{-p+h+k-p_j}^{(i)}) \\ + \sum_{j=1}^{l_2} \sum_{p_j=1}^{m-1} m e_{p_j}^{(i)}(v_{-p+h+k-p_j}^{(i)}) \Big|_{x_1=0} \quad \text{の形をしてゐることを示すことができる。}$$

ここで me_α は x_1 にかかる $\frac{1}{h_1} \alpha$ order α の微分作用素で h に独立で $q(x, \frac{\partial}{\partial x})$ により depend する。

さてこの式を (t, y) 系に直して

$$(4.10) \quad \left. \begin{array}{l} u_{-p+h}^{(i)}(t, y) \\ v_{-p+h}^{(i)}(t, y) \\ \frac{\partial u_{-p+h-1}^{(i)}}{\partial t}(t, y) \end{array} \right|_{t=0} = \left. \begin{array}{l} h_1^{(i)}(x, \varphi_x^{(i)}) \Delta_1(h, i, x'') w(x'') \\ h_1^{(i)}(x, \varphi_x^{(i)}) \Delta_2(h, i, x'') w(x'') \\ h_1^{(i)}(x, \varphi_x^{(i)}) \Delta_3(h, i, x'') w(x'') \end{array} \right|_{x_1=0}$$

$k \geq 1$ に対して

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{-p+h+k}^{(i)}(0, y), v_{-p+h+k}^{(i)}(0, y), \frac{\partial u_{-p+h+k-1}^{(i)}}{\partial t}(0, y) \text{ は } \neq \neq \\ \left[\sum_{j=1}^{l_1} me_{\alpha_j}^{(i,j)} [u_{-p+h+k-1}^{(i)}] + \sum_{j=1}^{l_1} \sum_{p_j=2}^m me_{\alpha_j}^{(i,j)} [u_{-p+h+k-p_j}^{(i)}] \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{l_2} \sum_{p_j=1}^m me_{\alpha_j}^{(i,j)} [v_{-p+h+k-p_j}^{(i)}] \right]_{t=0} \end{array} \right.$$

の形をしている

ここで me_α は (t, y) にかゝりて高々 order α の微分作用素である。

以上をまとめて formal solution は (4.6), (4.7) を初期条件 (4.10), (4.11) の下に解けばよい。

§ 5.

さて前 § で得られた formal solution (4.2) が "exact" であることを示そう。これは Mizohata [3] による評価式によりは直ちに出来る。即ち

Proposition 1

$a(x)$, $b(x)$ は 2 つの正則函数で

$$|D_x^\nu a(x)| \leq \frac{(r+|\nu|)!}{(\frac{k}{2}\rho)^m} A$$

$$k > 1$$

$$|D_x^\nu b(x)| \leq \frac{(s+m)!}{\rho^{m'}} B$$

が成立つとする。ここで r, s は正又は 0 の整数である。

そのとき

$$|D_x^\nu (ab)(x)| \leq \frac{(r+s+m)!}{\rho^{m'}} \left(\frac{AB}{C_r^{r+s}} \right) \times \frac{k}{k-1}$$

次に微分作用素

$$\Pi[u] = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^q u + \sum_{\nu < \ell} a_\nu(t, x) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\nu u$$

において係数 $a_\nu(t, x)$ が

$$|D_{t,x}^\nu a_\nu(t, x)| \leq \frac{|\nu|!}{(\frac{k}{2}\rho)^m} \delta$$

を充ちると。そのとき

Proposition 2

$u(t, x)$ を

$$\begin{cases} \Pi[u] = f(t, x) \\ (D_t^\alpha u)(0, x) = 0 \quad 0 \leq \alpha \leq \ell-1 \end{cases}$$

の解とする。

$$\text{すなわち, } |D_x^\nu D_t^q f(t, x)| \leq \frac{(r+q+|\nu|)!}{\rho^{q+|\nu|}} \exp(\ell\delta|t|) K(|t|)^{r+q+|\nu|} (\ell\delta)^q A$$

が成立つときは

$$|D_x^\gamma D_t^\delta u(t, x)|$$

$$\leq 2^l \frac{(r-l+\delta+|\nu|)!}{\rho^{\delta+|\nu|}} \exp(l\delta|t|) K(|t|)^{r+\delta+|\nu|} (e\delta)^\delta A$$

$$=: \tau'' \quad K(|t|) = \exp(l\delta|t|) (1+l\delta|t|) \quad \delta \geq 27, \\ 0 < \rho \leq \frac{1}{18}$$

Proposition 3

$$\Pi[u] = 0$$

$$\text{初期条件} \quad \begin{cases} |D_x^\gamma u(0, x)| \leq \frac{(r-l+1+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} A \\ \vdots \\ |D_x^\gamma \frac{\partial^{l-1} u}{\partial t^{l-1}}(0, x)| \leq \frac{(r+|\nu|)!}{\rho^{|\nu|}} A \end{cases}$$

この解を $u(t, x)$ とするとき

$$|D_x^\gamma D_t^\delta u(t, x)|$$

$$\leq 2^l \frac{(r-l+1+\delta+|\nu|)!}{\rho^{\delta+|\nu|}} \exp(l\delta|t|) K(|t|)^{r+\delta+|\nu|} (e\delta)^\delta A$$

この S' の Proposition を利用して formal solution における $u_k^{(1)}$, $v_k^{(1)}$ を評価することになる。即ち

$$(5.1) \quad |D_x^\gamma w(\tau x^{(1)}, t)| \leq \frac{A}{\rho^{|\nu|}} (r+|\nu|)!$$

$$\max_{|x'| \leq p} |W(x')| = A$$

とある。このとき

$$|D_x^\nu \Delta_1(h, i, x')|, |D_x^\nu \Delta_2(h, i, x')|, |D_x^\nu \Delta_3(h, i, x')| \leq \frac{|v|!}{(3p)^{|v|}} N$$

とあると

$$(P_k) \left\{ \begin{aligned} & |D_y^\nu D_t^b u_{-p+h+k-1}^{(i)}(t, y)| \\ & \leq A N B^{k+1} \frac{(r+k-1+|v|+g)!}{p^{|v|+g}} \exp(2\gamma|t|) K(|t|)^{r+k+|v|+g} (2\gamma)^g \\ & |D_y^\nu D_t^b v_{-p+h+k}^{(i)}(t, y)| \\ & \leq A N B^{k+1} \frac{(r+k+|v|+g)!}{p^{|v|+g}} \exp(\gamma|t|) K(|t|)^{r+k+|v|+g} (\gamma)^g \end{aligned} \right.$$

$$(I_k) \left\{ \begin{aligned} & |D_y^\nu u_{-p+h+k}^{(i)}(0, y)| \\ & |D_y^\nu v_{-p+h+k}^{(i)}(0, y)| \\ & |D_y^\nu \frac{\partial u_{-p+h+k-1}^{(i)}}{\partial t}(0, y)| \end{aligned} \right\} \leq B^{k+1} N A \frac{(r+k+|v|)!}{p^{|v|}}$$

が成立つ。ここで B は微分作用素 $a(r, \frac{\partial}{\partial x})$ に関する定数で k に独立である。

これは数学的帰納法により、Proposition 1, 2, 3 を使うことにより得られる。これから formal solution (4.2) の

の exactness が与へた。

Remark 特異点から出る characteristic surface が切れる場合
については勿論定理は成立しない。たとえば

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{1}{y} \end{array} \right.$$

の一般解 $u(x, y)$ は

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \log\left(\frac{\sqrt{y} + x}{\sqrt{y} - x}\right)$$

の如く有限多価性をもつてくる。

文献

[1] A. Lax On Cauchy's problem for partial differential equations with multiple characteristics

Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956)
135~169

[2] D. Ludwig Exact and asymptotic solutions of the

Cauchy problem. Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960)
473-508

- [3] S. Mizohata Solutions nulles et solutions non
analytiques J. Math. Kyoto Univ. 1 (1962)
271-302
- [4] S. Mizohata et Y. Ohya. Sur la condition de
E.E. Levi Concernant des Équations Hyperboliques.
Pbls. R.I. M. S., Kyoto Univ. Ser. A, vol 4 1968
p 511-526
- [5] S. Matsumura. On non-strict hyperbolicity.
Proceeding of International Conference on Functional
Analysis & Related Topics (1969) (to appear)
- [6] C. D Hill Parabolic Equations in One Space Variable
and the Non-Characteristic Cauchy Problem.
Comm. Pure Appl Math 20 (1967) 619-633